

Υπολογιστική Επίλυση Εξισώσεων Συναγωγής & Διάχυσης Θερμότητας σε Δομοστοιχειωτές Γεωμετρίες

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Υπολογιστική επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς θερμότητας σε δισδιάστατα ομοιόμορφα πλέγματα, που είναι διασυνδεδεμένα μέσω δυναμικών συνωριακών συνθηκών στο υπολογιστικό περιβάλλον της MATLAB.

Βήμα 1: Εξισώσεις Μεταφοράς Θερμότητας

Μερική Διαφορική Εξίσωση Μεταφοράς Θερμότητας στις δύο διαστάσεις.

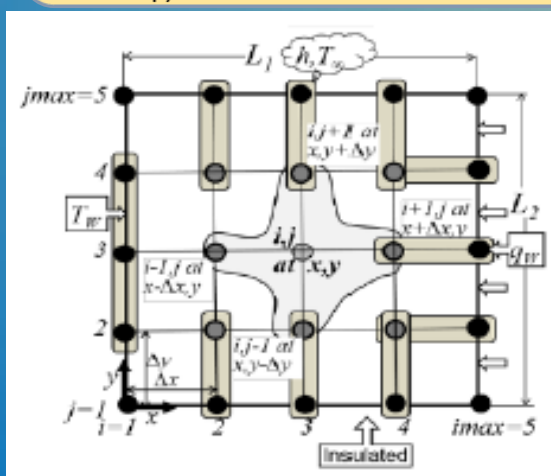
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho C_p}$$

Διακριτοποίηση των συνεχών παραγώγων χρησιμοποιώντας το άμεσο σχήμα FTCS για την χρονική παράγωγο, την πρώτη και δεύτερης τάξης κεντρική διαφορά για τις χωρικές παραγώγους.

Η Γραμμική Αλγεβρική Εξίσωση Μεταφοράς Θερμότητας στις δύο διαστάσεις. Η συγκεκριμένη εξίσωση επιλύεται επαναληπτικά, με χρονικό βήμα Δt , σε όλους τους κόμβους των δομοστοιχειωτών πλεγμάτων.

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i+1,j}^n \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{u \Delta t}{2 \Delta x} \right) + T_{i-1,j}^n \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{u \Delta t}{2 \Delta x} \right) + T_{i,j}^n \left(1 - \frac{2 \alpha \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2 \alpha \Delta t}{\Delta y^2} \right) + T_{i,j+1}^n \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} - \frac{v \Delta t}{2 \Delta y} \right) + T_{i,j-1}^n \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} + \frac{v \Delta t}{2 \Delta y} \right) + \frac{\dot{q} \Delta t}{\rho C_p}$$

Δημιουργία πλέγματος πεπερασμένων διαφορών με διάφορες οριακές συνθήκες. Παρουσίαση του κριτηρίου ευστάθειας (Κριτήριο πλεγματοκού αριθμού Fourier και Κριτήριο Courant-Friedrichs-Lewy) για την επιλογή του χρονικού βήματος επίλυσης Δt .



$$\Delta t_{diff} \leq \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right)$$

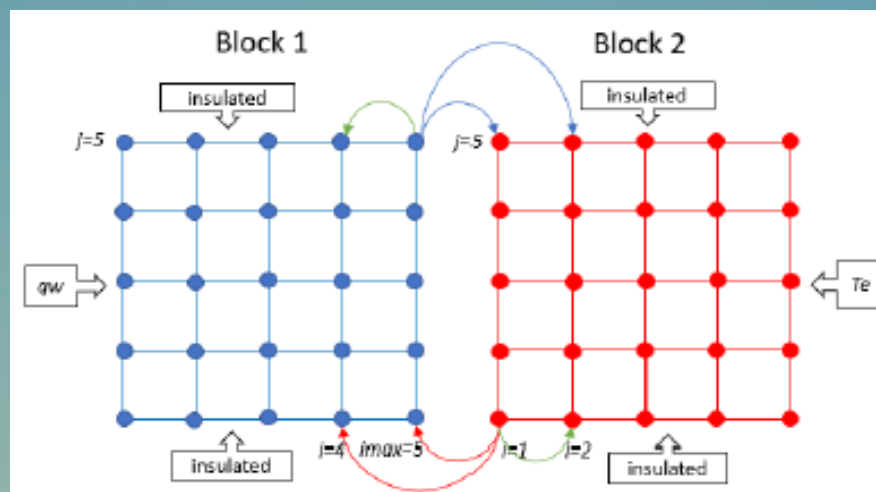
$$\Delta t_{adv} \leq \frac{\Delta x \Delta y}{|u| \Delta y + |v| \Delta x}$$

$$\Delta t_{stab} = \min(\Delta t_{adv}, \Delta t_{diff})$$

Βήμα 2: Δομοστοιχειωτή σύζευξη

Εφαρμογή των οριακών και αρχικών συνθηκών σε όλα τα δομοστοιχειωτά πλέγματα. Οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται είναι τύπου σταθερής θερμοκρασίας, σταθερής ροής θερμότητας και συναγωγής.

Εφαρμογή της δομοστοιχειωτής μεθόδου σύζευξης των οριακών συνθηκών δύο πλεγμάτων. Δημιουργία δυναμικών οριακών συνθηκών.



Καθορισμός ενδιάμεσων τιμών $T_{boundary}^{Block (*)}$. Οι τιμές αυτές λαμβάνουν την πληροφορία από τους κόμβους των δύο πρώτων στηλών του γειτονικού πλέγματος. Έπειτα ακολουθεί η προσαρμογή των τιμών αυτών με τους γειτονικούς κόμβους του ίδιου πλέγματος, υπολογίζοντας τις τιμές $T_{boundary}^{Block}$. Η συγκεκριμένη διαδικασία εξασφαλίζει την μετάδοση της πληροφορίας από το ένα γειτονικό μπλοκ στο άλλο. Η διαδικασία της προσαρμογής των θερμοκρασιών απαλλάσσει το πρόβλημα από τις ταλαντώσεις καθώς προσαρμόζει τις τιμές των οριακών κόμβων στα θερμικά δεδομένα του ίδιου πλέγματος.

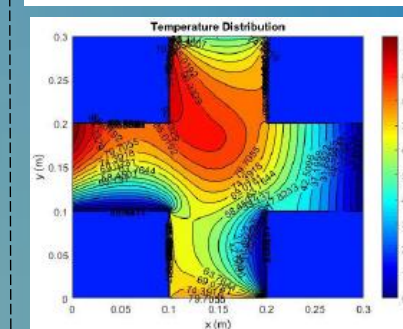
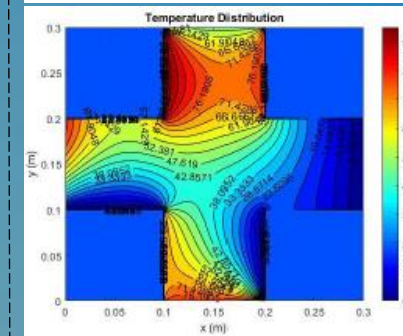
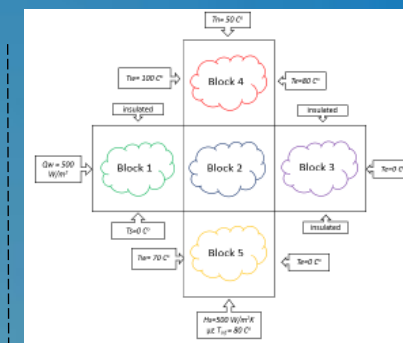
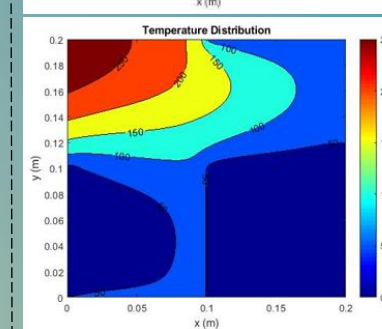
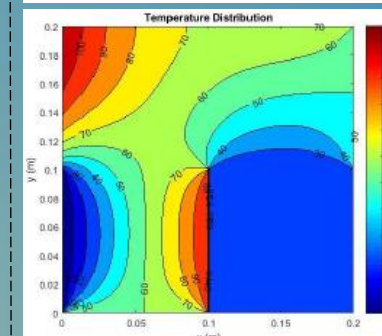
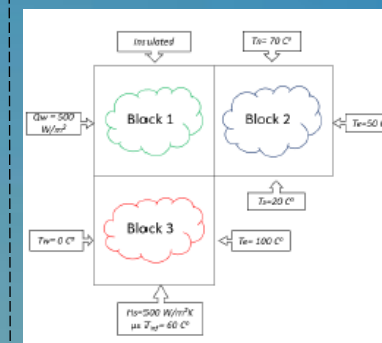
$$T_{5,j}^{Block 1 (*)} = \frac{1}{2} (T_{1,j}^{Block 2} + T_{2,j}^{Block 2})$$

$$T_{1,j}^{Block 2 (*)} = \frac{1}{2} (T_{4,j}^{Block 1} + T_{5,j}^{Block 1})$$

$$T_{5,j}^{Block 1} = \frac{1}{2} (T_{5,j}^{Block 1 (*)} + T_{4,j}^{Block 1})$$

$$T_{1,j}^{Block 2} = \frac{1}{2} (T_{1,j}^{Block 2 (*)} + T_{2,j}^{Block 2})$$

Αποτελέσματα δύο διαφορετικών δομοστοιχειωτών παραδειγμάτων



Δισδιάστατες δομοστοιχειωτές γεωμετρίες. Στην πρώτη σειρά των περιγραμμάτων το πεδίο των ταχυτήτων μεταφοράς έχει μηδενικές τιμές. Στην δεύτερη σειρά στο σχήμα Γ εφαρμόζεται οριζόντια ταχύτητα u , ενώ στον σταυρό οριζόντια u , κατακόρυφη $-v$, ίσων μέτρων, και ομοιόμορφη παραγωγή θερμότητας στο κεντρικό πλέγμα.

Συμπεράσματα

- Διάφορες δισδιάστατες γεωμετρίες μπορούν να μοντελοποιηθούν προσεγγιστικά, διακριτοποιώντας την σε μικρότερα τετραγωνικά τμήματα.
- Μέθοδος κατασκευής δυναμικών οριακών συνθηκών για την σύνδεση των πλεγμάτων.