

Υπολογιστική Επίλυση των Εξισώσεων Ρευστοδυναμικής σε Δομοστοιχειωτές Γεωμετρίες

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Υπολογιστική επίλυση των ασυμπίεστων εξισώσεων ροής σε δισδιάστατα ομοιόμορφα πλέγματα πεπερασμένων όγκων. Τα πλέγματα είναι διασυνδεδεμένα μεταξύ τους μέσω δυναμικών συνοριακών συνθηκών, στο υπολογιστικό περιβάλλον της MATLAB.

Διακριτοποιημένες Εξισώσεις Navier-Stokes

Πρώτη Προσέγγιση

$X = \{n, n+1, n+\frac{1}{2}\}$, για το άμεσο σχήμα, το έμμεσο σχήμα και το σχήμα των Crank-Nicolson.

- Οι παροχές μάζας στους όρους μεταφοράς ορίζονται στο χρονικό βήμα n (αποφυγή της μη-γραμμικότητας).
- Οι πιέσεις και οι παροχές μάζας στην εξίσωση διατήρησης της μάζας ορίζονται για το χρονικό βήμα $n+1$.

Διακριτοποιημένες εξισώσεις Navier-Stokes:

$$\rho \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{\Delta t} \Delta V_p + A_{u,p}^x = D_{u,p}^x + (p_w^{n+1} - p_e^{n+1}) \Delta y_p$$

$$\rho \frac{v_p^{n+1} - v_p^n}{\Delta t} \Delta V_p + A_{v,p}^x = D_{v,p}^x + (p_s^{n+1} - p_n^{n+1}) \Delta x_p$$

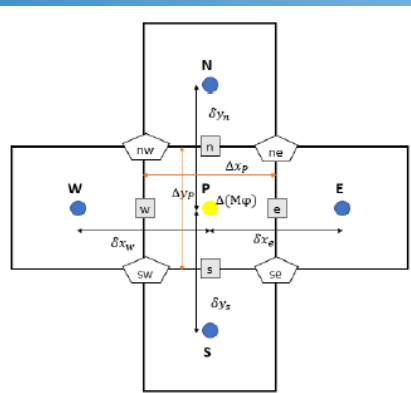
$$S_{m,p}^{n+1} = (m_{x,e}^{n+1} - m_{x,w}^{n+1}) \Delta y_p + (m_{x,n}^{n+1} - m_{x,s}^{n+1}) \Delta x_p = 0$$

$$A_{\phi,p}^x = [(m_{x,e}^{+x} \phi_e^{+x} + m_{x,e}^{-x} \phi_e^{-x}) \Delta y_p - (m_{x,w}^{+x} \phi_w^{+x} + m_{x,w}^{-x} \phi_w^{-x}) \Delta y_p] + [(m_{x,n}^{+x} \phi_n^{+x} + m_{x,n}^{-x} \phi_n^{-x}) \Delta x_p - (m_{x,s}^{+x} \phi_s^{+x} + m_{x,s}^{-x} \phi_s^{-x}) \Delta x_p]$$

$$D_{\phi,p}^x = \mu \left(\frac{\phi_e^x - \phi_p^x}{\Delta x_e} \Delta y_p - \frac{\phi_p^x - \phi_w^x}{\Delta x_w} \Delta y_p + \frac{\phi_n^x - \phi_p^x}{\Delta y_n} \Delta x_p - \frac{\phi_p^x - \phi_s^x}{\Delta y_s} \Delta x_p \right)$$

$$p_w^{n+1} - p_e^{n+1} = \frac{\Delta x_p p_w^{n+1} + \Delta x_w p_p^{n+1}}{\Delta x_p + \Delta x_w} - \frac{\Delta x_e p_p^{n+1} + \Delta x_p p_e^{n+1}}{\Delta x_p + \Delta x_e}$$

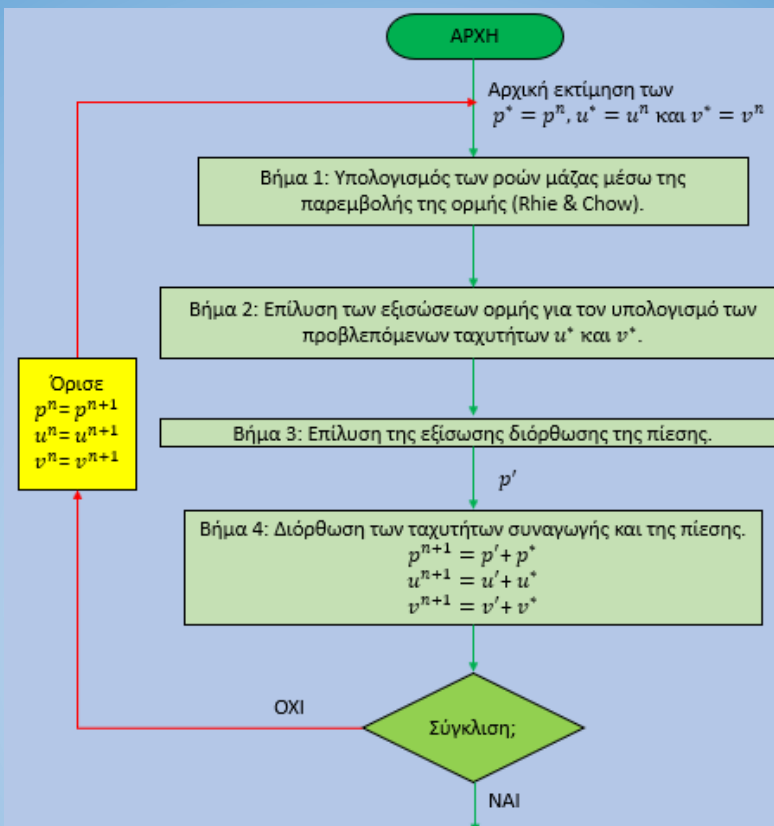
$$p_s^{n+1} - p_n^{n+1} = \frac{\Delta y_p p_s^{n+1} + \Delta y_s p_p^{n+1}}{\Delta y_p + \Delta y_s} - \frac{\Delta y_n p_p^{n+1} + \Delta y_p p_n^{n+1}}{\Delta y_p + \Delta y_n}$$



Δεύτερη Προσέγγιση

- Χρήση σχημάτων FOU, SOU, QUICK και CD για τους όρους μεταφοράς.
- Χρήση της γραμμικής παρεμβολής για τις ταχύτητες των παροχών μάζας και των πιέσεων.

Αλγόριθμος επίλυσης SIMPLE



$$2 \quad \alpha P \phi_p^{n+1} = \alpha E \phi_e^n + \alpha W \phi_w^n + \alpha S \phi_s^n + \alpha N \phi_n^n + b + S_{\phi,p}^{n+1}$$

Χρήση της παρεμβολής της ορμής Rhie & Chow στις παροχές μάζας, για την εφαρμογή του αλγορίθμου σε ομοιόθετο πλέγμα.

$$1 \quad u_e^n = \bar{u}_e^n + \frac{\Delta t (p_e^n - p_p^n)}{\rho \Delta x_e} \{ \bar{u}_e^n = \bar{u}_e^n, \bar{u}_p^n \}; m_{x,e}^* = \rho u_e^*$$

$$u_w^n = \bar{u}_w^n + \frac{\Delta t (p_w^n - p_p^n)}{\rho \Delta x_w} \{ \bar{u}_w^n = \bar{u}_w^n, \bar{u}_p^n \}; m_{x,w}^* = \rho u_w^*$$

$$v_n^n = \bar{v}_n^n + \frac{\Delta t (p_p^n - p_n^n)}{\rho \Delta y_n} \{ \bar{v}_n^n = \bar{v}_n^n, \bar{v}_p^n \}; m_{y,n}^* = \rho v_n^*$$

$$v_s^n = \bar{v}_s^n + \frac{\Delta t (p_p^n - p_s^n)}{\rho \Delta y_s} \{ \bar{v}_s^n = \bar{v}_s^n, \bar{v}_p^n \}; m_{y,s}^* = \rho v_s^*$$

Εξισώσεις των ταχυτήτων διόρθωσης:

$$\alpha P \phi_p' = S_{\phi,p} \quad 4$$

Εξισώσεις των παροχών μάζας διόρθωσης:

$$m_{x,e}' = \rho u_e' = \Delta t \frac{(p_p' - p_e')}{\Delta x_e}$$

$$m_{x,w}' = \rho u_w' = \Delta t \frac{(p_p' - p_w')}{\Delta x_w}$$

$$m_{y,n}' = \rho v_n' = \Delta t \frac{(p_p' - p_n')}{\Delta y_n}$$

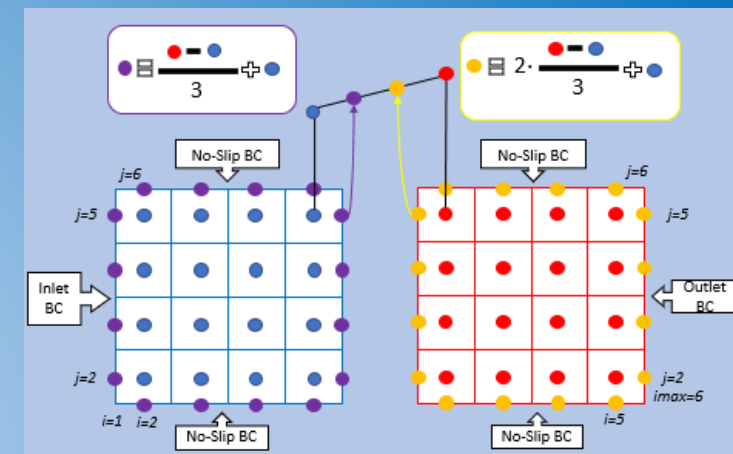
$$m_{y,s}' = \rho v_s' = \Delta t \frac{(p_p' - p_s')}{\Delta y_s}$$

Εξίσωση διόρθωσης της πίεσης:

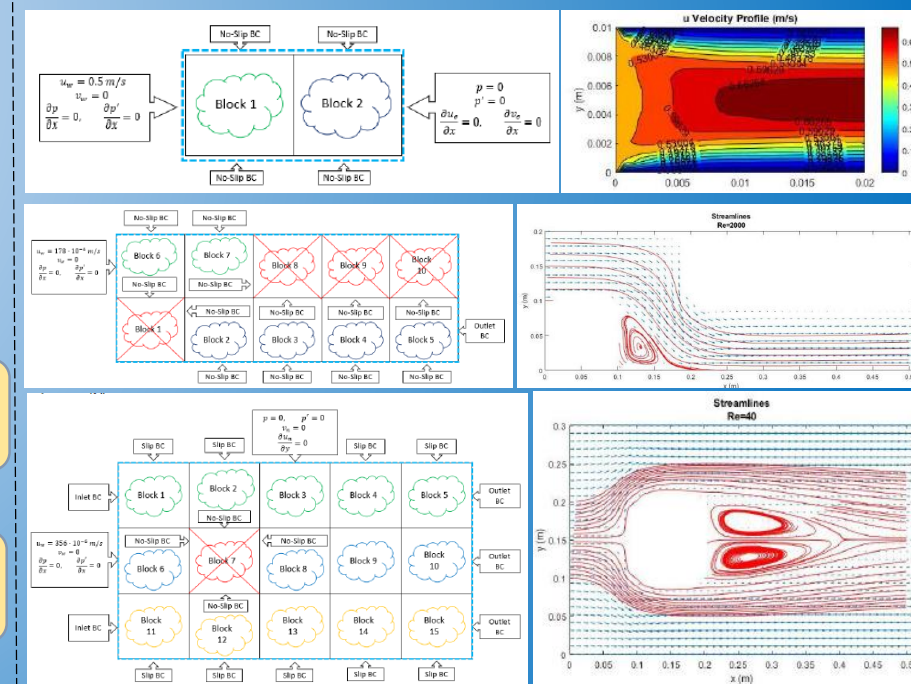
$$(m_{x,e}' - m_{x,w}') \Delta y_p + (m_{x,n}' - m_{x,s}') \Delta x_p = -(m_{x,e}^* - m_{x,w}^*) \Delta y_p - (m_{x,n}^* - m_{x,s}^*) \Delta x_p$$

$$3 \quad \alpha P' p_p' = \alpha E' p_e' + \alpha W' p_w' + \alpha S' p_s' + \alpha N' p_n' + b'$$

Δομοστοιχειωτή Σύνδεση (P, u, v) μέσω της Γραμμικής Παρεμβολής



Αποτελέσματα:



Συμπεράσματα:

- Διάφορες δισδιάστατες γεωμετρίες μπορούν να μοντελοποιηθούν προσεγγιστικά, διακριτοποιώντας την σε μικρότερα τετραγωνικά τμήματα.
- Μέθοδος κατασκευής δυναμικών οριακών συνθηκών για την σύνδεση των πλεγμάτων.